NOTATIONS ET OBJECTIF DU PROBLÈME

DURÉE : 4 heures

E désigne un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire (réel) noté $< \cdot | \cdot >$. La norme euclidienne d'un vecteur x de E est alors définie par $\| x \| = <x|x>^{1/2}$.

Un endomorphisme f de E est dit symétrique s'il vérifie $<f(x)|y> = <x|f(y)>$ pour tout x et tout y de E. Pour un tel endomorphisme f et pour tout x, élément non nul de E, on considère le quotient :

$$R_f(x) = \frac{<f(x)|x>}{\| x \|^2},$$

et pour F, sous-espace vectoriel de E non réduit à $\{ 0 \}$, on pose : $\mathcal{R}_f(F) = \sup_{\substack{x \in F \\ x \neq 0}} R_f(x)$

Si λ est une valeur propre de f, E_λ désigne l'espace propre de f associé à λ.

Si F est un sous-espace de E, $F^\perp$ désigne son orthogonal, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tout vecteur de F.

L'objectif du problème est l'étude des relations entre certains nombres $\mathcal{R}_f(F)$, les valeurs propres et les espaces propres de f, ce qui est fait dans la première partie.

La deuxième partie décrit un algorithme permettant d'obtenir $\mathcal{R}_f(E)$, ce qui conduit à des méthodes de calcul approché des valeurs propres d'un endomorphisme symétrique et des vecteurs propres associés.

La troisième partie étudie un exemple dans un espace dont la dimension n'est pas finie.

(La troisième partie est indépendante de la seconde.)

PREMIÈRE PARTIE

E est dans cette partie et la suivante, un espace de dimension finie n. Une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ étant choisie dans E, on rappelle que le produit scalaire de 2 vecteurs x et y de composantes $(x_i)_{i=1,\ldots,n}$ et $(y_i)_{i=1,\ldots,n}$ sur cette base, s'exprime au moyen de :

$$<x|y> = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

Si M est l'image matricielle sur $\mathcal{B}$ de l'endomorphisme f, il est équivalent de dire que f est symétrique ou que M est une matrice symétrique, c'est-à-dire égale à sa transposée M^T.

1. ÉTUDE DANS LE CAS $n = 1$. f est alors définie par $f(x) = \lambda x$ où λ est un réel donné. Calculer $R_f(x)$ puis $\mathcal{R}_f(E)$.

2. ÉTUDE DANS LE CAS $n = 2$.

x étant donné non nul dans E, on notera θ l'unique réel de $[0, 2\pi[$ permettant l'écriture de x sous la forme :

$$x = \| x \| (\cos \theta \, e_1 + \sin \theta \, e_2) .$$

a. Étude d'un premier cas particulier.

On désigne par E_1 et E_2 les 2 droites vectorielles engendrées par e_1 et par e_2 et on considère la projection orthogonale p sur E_1. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de p. Montrer que p est symétrique. Calculer $R_p(x)$ à l'aide des composantes x_1 et x_2. En déduire $\mathcal{R}_p(E_1)$, $\mathcal{R}_p(E_2)$, $\mathcal{R}_p(E)$. Trouver les sous-espaces F tels que : $\mathcal{R}_p(F) = \mathcal{R}_p(E)$.

b. Étude d'un deuxième cas particulier.

Les notations étant celles de la question précédente, on considère la symétrie orthogonale s par rapport à E_1. Montrer que s est un endomorphisme symétrique. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de s. Calculer $R_s(x)$ à l'aide de θ. En déduire $\mathcal{R}_s(E_1)$, $\mathcal{R}_s(E_2)$, $\mathcal{R}_s(E)$. Trouver les sous-espaces F tels que $\mathcal{R}_s(F) = \mathcal{R}_s(E)$.

Tournez la page S. V. P.

c. On suppose que la matrice M de l'endomorphisme f est $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$, a et b étant des réels donnés strictement positifs. Calculer les valeurs propres et les espaces propres de f. Calculer $R_f(x)$ à l'aide de 2θ, de a et de b. En déduire $\mathscr{R}_f(E)$.

d. Cas général.

Calculer $R_f(x)$ à l'aide de 2θ et des coefficients de la matrice M de f dans la base $\mathscr{B}$. En déduire $\mathscr{R}_f(E)$ et montrer que c'est la plus grande valeur propre de f.

3. ÉTUDE D'UN CAS PARTICULIER LORSQUE $n = 3$.

On considère l'endomorphisme f dont la matrice M dans la base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ s'écrit : $M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

a. Calculer les valeurs propres et déterminer les sous-espaces propres de f.

b. En observant encore que, x étant donné, il existe θ et φ, avec $\theta \in [0, 2\pi[$ et $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, tels que : $x = \|x\| [\cos\varphi \cos\theta\, e_1 + \sin\varphi\, e_2 + \cos\varphi \sin\theta\, e_3]$,

calculer $R_f(x)$ à l'aide de $\sin 2\varphi$ et $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$. En déduire $\mathscr{R}_f(E)$. Déterminer un sous-espace F tel que $\mathscr{R}_f(F) = \mathscr{R}_f(E)$.

c. Soit F_1 le sous-espace de E d'équation $x_1 - \sqrt{2}\, x_2 + x_3 = 0$.

Montrer que $F_1^{\perp}$ est un sous-espace propre de f. Déterminer $\mathscr{R}_f(F_1)$. (On pourra soit faire un calcul direct, soit appliquer à la restriction de f à F_1 les résultats de la question 2.)

4. ÉTUDE LORSQUE n EST QUELCONQUE.

L'endomorphisme f étant symétrique, il existe une base orthonormée $\mathscr{V} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ constituée de vecteurs propres pour f, chacun de ces vecteurs propres ε_i étant associé à une valeur propre λ_i. On suppose $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$.

a. Soit x un élément de E écrit dans la base $\mathscr{V}$ sous la forme : $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varepsilon_i$.

Montrer que si x est non nul, $R_f(x)$ est donné par la relation :

$$(1) \qquad R_f(x) = \lambda_n + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i^2(\lambda_i - \lambda_n)}{\|x\|^2}.$$

b. Déterminer $R_f(\varepsilon_n)$. Déduire du résultat obtenu et de la formule précédente que $\mathscr{R}_f(E)$ est λ_n, la plus grande des valeurs propres de f.

c. On suppose que λ_n est une valeur propre simple. Que peut-on dire de la dimension du sous-espace propre associé E_{λ_n} ? Déterminer $\mathscr{R}_f(E_{\lambda_n}^{\perp})$. (On pourra, soit utiliser une relation analogue à (1), soit se ramener à la dimension $n - 1$ et utiliser *b.*)

d. Déterminer $\mathscr{R}_f(E_{\lambda_n}^{\perp})$ dans le cas général où E_{λ_n} peut être de dimension supérieure à 1.

5. APPLICATIONS.

a. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0,)\}$ par :

$$g(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Déterminer la borne supérieure de l'ensemble des valeurs prises par $g(x_1, x_2, x_3)$: à cet effet, on déterminera une matrice M symétrique telle que $g(x_1, x_2, x_3) = R_f(x)$ où x est le vecteur (x_1, x_2, x_3) de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de matrice M dans la base $\mathscr{B}$.

Tournez la page S.V.P.

b. On considère la matrice carrée T d'ordre n strictement supérieur à 1, dont tous les termes sont égaux à 1 sauf ceux de la diagonale principale qui sont nuls. Montrer que -1 est valeur propre d'ordre $n-1$ de T. En déduire les valeurs propres de la matrice $M = aI - bT$ où a et b sont deux réels strictement positifs et I la matrice de l'application identique.

En déduire la borne supérieure de l'ensemble des valeurs prises par la fonction h définie sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$ par :

$$h(x_1, \dots, x_n) = a - 2b \frac{\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

DEUXIÈME PARTIE

f est toujours un endomorphisme symétrique dans l'espace E de dimension n. Les valeurs propres $(\lambda_i)_{i=1,\dots,n}$ sont supposées positives ou nulles et satisfont à :

$$0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \dots \leqslant \lambda_n.$$

$\mathcal{V} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ est toujours une base orthonormée de vecteurs propres de f, ε_i étant vecteur propre associé à λ_i.

Soit x un vecteur de E n'appartenant pas au noyau de f. On lui associe la suite $(x^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ dans E définie de la façon suivante :

$$x^{(0)} = x$$
$$x^{(1)} = f(x)$$
$$x^{(p)} = f(x^{(p-1)})$$

On propose l'étude de la suite de nombres positifs $(s_p)_{p \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall\ p \geqslant 0 \qquad s_p = \frac{\| x^{(p+1)} \|}{\| x^{(p)} \|}.$$

On va relier la limite de cette suite à $\mathcal{R}_f(E)$ et on en déduira une méthode de calcul approché de la plus grande valeur propre λ_n de f.

1. Convergence de la suite $(s_p)_{p \in \mathbb{N}}$.

a. Montrer que, pour tout entier p,

$$\| x^{(p+1)} \|^2 \leqslant \| x^{(p)} \| \cdot \| x^{(p+2)} \|.$$

b. Montrer que $x^{(2)}$ est non nul et plus généralement que tout terme de la suite $(x^{(p)})$ est non nul. On en déduit donc que la suite (s_p) est bien définie.

c. Déduire également de *a.* que cette suite (s_p) est croissante.

d. En écrivant $\| x^{(p+1)} \|^2$ sous la forme $\langle f(x^{(p)}) \mid f(x^{(p)}) \rangle$, montrer que la suite (s_p) est majorée par $\sqrt{\mathcal{R}_g(E)}$ où g est un endomorphisme symétrique que l'on précisera.

e. Conclure de ce qui précède que la suite (s_p) est convergente quel que soit le vecteur initial x supposé ne pas appartenir à Ker f. Montrer que :

$$\lim_{p \to +\infty} s_p \leqslant \lambda_n.$$

2. Obtention de cette limite.

a. Soit un vecteur v_j non nul, vecteur propre de f associé à la valeur propre λ_j supposée non nulle. Étudier la suite (s_p) de vecteur initial $x^{(0)} = v_j$.

Tournez la page S.V.P.

b. Soit x décomposé sur la base $\mathscr{V}$ des vecteurs propres selon la formule : $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varepsilon_j$.

Montrer que :

$$x^{(p)} = \lambda_n^p \left[\alpha_n \varepsilon_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_n} \right)^p \varepsilon_j \right].$$

c. En déduire que si λ_n est une valeur propre simple et si la composante α_n de x n'est pas nulle, on obtient : $\lim_{p \to +\infty} s_p = \lambda_n$.

Comment peut-on alors déterminer un vecteur propre de f associé à λ_n à l'aide de la suite (s_p) ?

d. Étudier la suite (s_p) lorsque le vecteur initial $x^{(0)}$ se trouve dans $E_{\lambda_n}^{\perp}$.

e. On suppose que λ_n est une valeur propre multiple. Montrer que le résultat de la question *c.* reste valable sous la réserve que x n'est pas élément de $E_{\lambda_n}^{\perp}$.

3. APPLICATION NUMÉRIQUE.

Soit la matrice symétrique M définie par :

$$M = \begin{bmatrix} 8{,}1 & -7{,}1 & 2 \\ -7{,}1 & 16{,}9 & -7{,}1 \\ 2 & -7{,}1 & 8 \end{bmatrix}$$

image matricielle de f dans $\mathscr{B}$.

En utilisant pour vecteur initial x celui de composantes $(0, -1, 1)$ dans la base $\mathscr{B}$, déterminer les vecteurs $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$, $x^{(4)}$ puis les termes de la suite (s_p) pour $p = 1, 2, 3, 4$. Vérifier que les vecteurs $x^{(0)}$, $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ sont indépendants et en déduire une valeur approchée de λ_3, la plus grande valeur propre de f. Déterminer également de façon approchée les composantes d'un vecteur propre associé.

TROISIÈME PARTIE

Dans cette partie, E est l'espace vectoriel des fonctions continues sur l'intervalle réel $[-1, +1]$, à valeurs réelles. Cet espace est muni du produit scalaire $< \cdot | \cdot >$ défini pour tout couple d'élément φ_1 et φ_2 de E par :

$$<\varphi_1 | \varphi_2> = \int_{-1}^{+1} \varphi_1(t)\, \varphi_2(t)\, dt.$$

On considère l'endomorphisme f de E qui à toute fonction φ élément de E associe l'élément ψ de E défini par :

$$\forall\ t \in [-1, +1] \qquad \psi(t) = \varphi(-t).$$

1. Montrer que f est symétrique.

2. Calculer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f. (On pourra utiliser l'endomorphisme f^2).

3. *a.* Calculer $R_f(\varphi)$ lorsque φ est une fonction paire.

b. Soit φ un élément non nul de E. Montrer que :

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(t)[\varphi(t) - \varphi(-t)]\, dt = -\int_{-1}^{+1} \varphi(-t)[\varphi(t) - \varphi(-t)]\, dt.$$

En déduire que :

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(t)[\varphi(t) - \varphi(-t)]\, dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} [\varphi(t) - \varphi(-t)]^2 dt,$$

puis :

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(t)\, \varphi(-t)\, dt \leqslant \int_{-1}^{+1} \varphi^2(t)\, dt.$$

Dans quel cas l'égalité a-t-elle lieu ?

c. Calculer $\mathscr{R}_f(E)$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail